

Konvergenzsätze für Integrale -315-

Wann impliziert $f_n \rightarrow f$ die
Konvergenz $\int f_n d\lambda \rightarrow \int f d\lambda$?

Der Schlüssel zur Beantwortung ist

Satz 25.5 : (Lemma von Fatou)

Sei λ ein Maß auf X und

$f_k : X \rightarrow [0, \infty]$ eine Folge

nicht-negativer λ -messbarer

Funktionen. Dann gilt:

$$\int_X \left(\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \right) d\lambda \leq$$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\lambda$$

Verallgemeinerung (ohne Vorzeichen bdg):

$$\left\{ \begin{array}{l} f_k \geq g \quad \underline{\lambda\text{-f.ü.}} \quad \text{mit} \\ g \quad \underline{\lambda\text{-summierbar}} \end{array} \right\} \Rightarrow \dots$$

Beweis: $f := \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$ λ -

messbar $\implies$ alle auftretenden

Integrale existieren in $[0, \infty]$;

Sei g eine λ -T.F. mit

$$0 \leq g \leq f \quad \underline{\lambda\text{-f.ü.}}$$

Schreibe

$$g = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \chi_{A_j}$$

mit

$$\boxed{a_j > 0}$$

und

 $A_j \in \mathcal{M}_\lambda, A_j \text{ paarweise disjunkt}$

Für

$$0 < \varepsilon < 1, j, k \in \mathbb{N} \text{ sei}$$

$$B_{j,k} := A_j \cap \{x: f_\lambda(x) > \varepsilon a_j\}$$

für alle $\lambda \gg k$

Es gilt:

$$(1) \quad A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{j,k}$$

Sei $x \in A_j$. Gäbe es kein k

mit $x \in B_{j,k}$

So könnte man zu jedem k
ein $\ell \gg k$ finden mit

$$f_\ell(x) \leq \pm a_j \implies$$

$$\liminf_{\ell \rightarrow \infty} f_\ell(x) \leq \pm a_j, \quad \text{d.h.}$$

$$f(x) \leq \pm a_j = \pm g(x) (< \infty!),$$

was $\pm < 1$ und $g \leq f$ (f.u.)
 wenn man $f(x) < \infty$ brachtet und x außerhalb einer Nullmenge wählt.
 Also gilt (1).
 spricht,
 (*: die Nullmenge, wo $g \leq 1$ verletzt ist)

genaus: (1) gilt bis auf λ -Nullmenge

Offensichtlich ist

$$(2) \quad B_{j,k} \subset B_{j,k+1}$$

Nun beachte noch (für jedes N) -319-

$$f_k \geq \sum_{j=1}^N f_k \chi_{A_j} \implies$$

$$\sum_{j=1}^N \int_{A_j} f_k d\lambda \leq \int f_k d\lambda;$$

$$\text{l. s.} \geq \sum_{j=1}^N \int_{B_{j,k}} f_k d\lambda$$

$\underbrace{A_j \supset B_{j,k}}_{\text{Def } B_{j,k}}$

$$\geq \sum_{j=1}^N a_j \lambda(B_{j,k})$$

Def $B_{j,k}$

Zusammen: $\int f_k d\lambda \geq \sum_{j=1}^N a_j \lambda(B_{j,k})$



$\forall N$

$$(1) + (2) \implies \bigcap_{j,k} (B_{j,k}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \bigcap (A_j)$$

Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ ergibt nach $\textcircled{*}$:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\lambda \geq$$

$$\pm \sum_{j=1}^N a_j \lambda(A_j)$$

$$\implies_{N \rightarrow \infty} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\lambda \geq \pm \int g d\lambda$$

$$\implies_{\pm \uparrow 1} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\lambda \geq \int g d\lambda$$

$$\text{---//---} \geq \int_* f d\lambda$$

$$\implies \text{Wegen } \int_* f d\lambda = \int f d\lambda \text{ (Satz 25.3(1))}$$

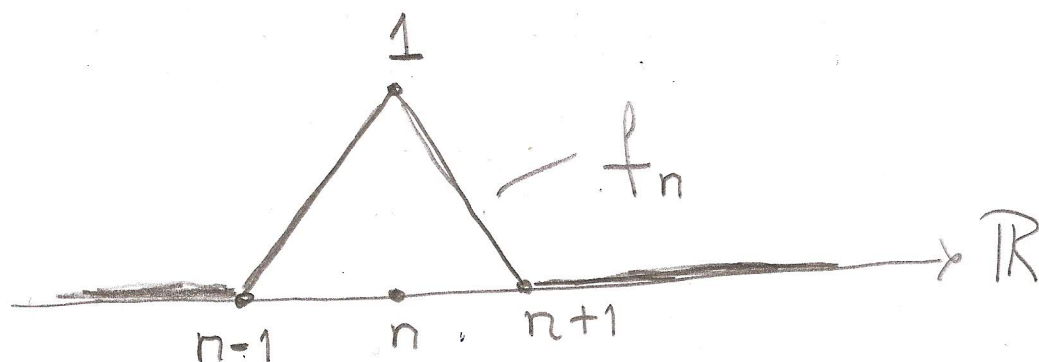
folgt alles. □

Bem: Beispiel für

$$\int \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k d\lambda < \liminf_{k \rightarrow \infty} \int f_k d\lambda$$

überlegen!

etwa:



$$\int f_n d\mathcal{L}^1 \equiv 1,$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \equiv 0.$$

Als Folgerung aus Fatou ergibt sich

Satz 25.6 : (monotone Konvergenz)

Sei λ ein Maß auf X und

$f_k : X \rightarrow \underline{[0, \infty]}$ eine
monoton wachsende Folge λ -
 messbarer Funktionen ≥ 0 . Dann
gilt:

$$\int_X \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\lambda.$$

Bem: 1.) $f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$

existiert wegen der Monotonie für $x \in X$
 $\Rightarrow f$ λ -meßbar und ≥ 0

$\Rightarrow \int_X f d\lambda$ existiert in $[0, \infty]$.

Da auch $\int_X f_k d\lambda$ monoton wächst,
 folgt Existenz von $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\lambda \in [0, \infty]$.

2.) es reicht statt $f_k \geq 0$:

$f_k \geq g$ mit g λ -summierbar. -323-

Beweis: es ist $f_j \leq f \quad \forall j \Rightarrow$

$$\int_X f_j d\lambda \leq \int_X f d\lambda \Rightarrow$$
$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \int_X f_j d\lambda \leq \int_X f d\lambda;$$

Fatou liefert, $\int_X f d\lambda \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_X f_j d\lambda$,
also folgt die Beh.

Korollar: $f_k : X \rightarrow \underline{[0, \infty]}$ seien

λ -messbar $\Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k d\lambda = \int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) d\lambda.$$

p.w. Limes in $[0, \infty]$

der wichtigste Konvergenz-

Satz (ebenfalls Folgerung aus Fatou)

ist

Satz 25.7 :

Satz von Lebesgue über
majorisierte Konvergenz

Sei $g: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ λ -summierbar

("die Majorante"), also

$$\int_X |g| d\lambda < \infty.$$

X

f_k, f seien λ -messbare Funk-

tionen $X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit

$$|f_k| \leq |g| \quad \lambda\text{-f.ü.} \quad \underline{\text{und}}$$

$$f_k \rightarrow f \quad \text{p.w.} \quad \lambda\text{-f.ü.}$$

Dann gilt :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_k - f| d\lambda = 0,$$

speziell $\int_X |f| d\lambda < \infty$ und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\lambda = \int_X f d\lambda.$$

Beweis : Wegen $|f_k| \leq |g|$ λ -f.ü.
gilt (Satz 25.3 (4))

$$\int_X |f_k| d\lambda \leq \int_X |g| d\lambda$$

Fatou $\implies \int_X |f| d\lambda \leq \int_X |g| d\lambda$ -326-

(denn $|f_k| \rightarrow |f|$ p.w. λ -f.ü.)

M.a.W. : f_k und f sind summierbar.

Sei $f_k := 2|g| - |f_k - f| \geq 0$ λ -f.ü.

$\implies$ Fatou $\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\lambda \geq$

$\int_X \left(\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \right) d\lambda$
 $= 2g$ λ -f.ü.

$\implies$ $0 \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X [f_k - 2g] d\lambda$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int (-|f_k - f|) dx$$

$$= - \limsup_{k \rightarrow \infty} \int |f_k - f| dx$$

$$\Rightarrow \limsup_{k \rightarrow \infty} \int |f_k - f| dx \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \int |f_k - f| dx = 0.$$

$$\text{Wegen } \left| \int f_k dx - \int f dx \right| \leq$$

$$\int |f_k - f| dx$$

folgt die 2. Beh.

